(المحاضرة ١٣ مرتين مرقمة)

/ /

الأربعاء 9 / 5 / 2018م — المحاضرة -15-

ملاحظة:

لتكن $\{X_\alpha, \tau_\alpha\}_{\alpha \in I}$ أسرة من الفضاءات التبولوجية

$X = \prod_\alpha X_\alpha$ فضاء الجداء

يكون فضاء الجداء X T_i فضاء $(i = 0, 1, 2)$ $\Leftrightarrow$

إذا وفقط إذا كانت جميع الفضاءات الإحداثية X_α هي T_i فضاء

والعكس صحيح.

البرهان:

$\Leftarrow$ لزوم الشرط:

لنفرض أن فضاء الجداء X هو T_i فضاء $(i = 0, 1, 2)$

من ملاحظة سابقة: دائماً يوجد فضاء جزئي X'_α من فضاء الجداء X

بحيث يكون مكافئاً تبولوجياً (هوميومورفيزم) للفضاء الإحداثي X_α

من أجل أي α

• من الصفة الوراثية التي أشرنا إليها بأن أي فضاء جزئي من T_i فضاء

هو T_i فضاء

يكون الفضاء الجزئي X'_α هو T_i فضاء

• ومن الصفة التبولوجية (التكافؤ) $X_\alpha \simeq X'_\alpha$

يكون الفضاء الإحداثي هو T_i فضاء من أجل أي دليل α

$\Leftarrow$ كفاية الشرط:

نفرض جميع الفضاءات الإحداثية هي T_i فضاء والمطلوب أن X

فضاء الجداء هو T_i فضاء.

لذلك نأخذ نقطتين مختلفتين x, y من فضاء الجداء

الفضاء الثلاثي بالمفهوم x, y مختلفتين $x = (x_1, x_2, x_3)$

عندما إذا كانت أي من x_1, x_2, x_3 $y = (y_1, y_2, y_3)$

تختلف عن y_1, y_2, y_3

أي يوجد دليل δ بحيث $x_\delta \neq y_\delta$ في الفضاء الإحداثي X_δ
بالفرض الفضاء X_δ هو T_i فضاء
ومنه: اذا أخذنا تقييد الاسقاط $P_\delta : X \to X_\delta$
وميزة هذا التقييد أنه مستمر ومتباين
لأنه $P_\delta(x) = x_\delta$, $P_\delta(y) = y_\delta$
وأيضاً مستقر هذا التقييد هو T_i فضاء وحسب مبرهنة سابقة
المنطلقة X هو T_i فضاء $\Leftarrow$ فضاء الجداء هو T_i فضاء
وهو المطلوب

ملاحظة:
إن فضاء القسمة لـ T_i فضاء $(i=0,1,2)$ ليس من الضروري أن يكون T_i فضاء.
ويثبت ذلك مثال سابق هو التالي للتذكير:
* في الفضاء التبولوجي الحقيقي المألوف R «هو فضاء هاوسدورف» أي هو T_2 فضاء $\Leftarrow$ هو T_1 فضاء، T_0 فضاء.
وأخذنا علاقة تكافؤ: $x \rho y \Leftrightarrow x - y \in Q$ الفرق بينهما عدداً عادياً (علاقة تكافؤ)
و $\tau_R = \{\phi , R/\rho\}$
وهو فضاء تبولوجي ضعيف وهو ليس T_0 فضاء $\Leftarrow$ هو حتماً ليس T_1 فضاء وليس T_2 فضاء.

الفضاءات التبولوجية المتراصة:

تعريف:
لتكن $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ أسرة من المجموعات المفتوحة في فضاء تبولوجي X
نقول عن هذه الأسرة أنها تغطية للفضاء X اذا كان $X \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$
نسمي الفضاء X فضاءً متراصاً اذا كانت أي تغطية مفتوحة له تحوي على تغطية جزئية منتهية.
وهو الفضاء المتراص.

/ /

• مثال: التذكير بالتعريف

الفضاء الحقيقي R غير متراص لأن أسرة المجالات المفتوحة من الشكل $\{]-n,n[\}_{n\in N}$ تشكل تغطية مفتوحة لـ R

ولكنها لا تحتوي على تغطية جزئية منتهية.

$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \{]-n,n[\}_{n\in N}$

• كما أنه مثال ٢ هو:

لو كانت X مجموعة غير منتهية و τ التبولوجية القوية على X فإن الفضاء المتقطع الناتج غير متراص (X,τ)

لأنه أسرة المجموعات وحيدة العنصر جميع $X \subseteq \{\{x\}\}_{x\in X}$

تشكل تغطية مفتوحة لـ X, ولكنها لا تحوي على تغطية جزئية منتهية.

* تعريف:

نقول عن مجموعة جزئية A من فضاء تبولوجي X أنها متراصة إذا كان الفضاء الجزئي A متراص.

ويمكن بسهولة.

أن المجموعة A تكون متراصة إذا وفقط إذا كانت أي تغطية مفتوحة لها تحوي على تغطية جزئية منتهية.

مثال:

أي مجموعة منتهية في فضاء تبولوجي هي مجموعة متراصة.

ولتكن $A = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ ، $\{U_\alpha\}$

و

$A \subseteq \bigcup U_\alpha$

هذا يعني أنه توجد مجموعة U_{α_1} بحيث أنه نحصل إلى $a_1 \in U_{\alpha_1}$

ومن أجل كل a_i نوجد مجموعة بحيث $a_i \in U_{\alpha_i}$

⇐ حيث أن الأسرة المنتهية $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots U_{\alpha_n}$ تشكل تغطية منتهية لهذه المجموعة.

* وكذلك المجموعة الخالية تعتبر مجموعة متراصة.

خصوصيات متراصات:

ملاحظة 1:

المجموعة المغلقة في فضاء متراص تكون مجموعة متراصة،
في الحالة العامة العكس غير صحيح.

ملاحظة 2:

المجموعة المتراصة في فضاء هاوسدورف T_2 فضاء هي مجموعة مغلقة

ملاحظة 3:

التطبيق المستمر يحافظ على التراص. (المغلقة متراص)

يعني: اذا كان $f: X \to Y$ تطبيقا مستمرا من الفضاء
المتراص X الى Y فإن المجموعة $f(X)$ تكون متراصة.

• وكحالة خاصة:

اذا كان التطبيق غامر ⇐ فإن المستقر يكون فضاء متراصة
حيث $f(X) = Y$

نتيجة:

فضاء القسمة لفضاء متراص هو فضاء متراص.

البرهان:

نأخذ التطبيق القانوني $\gamma: X \to X/R$

$\gamma(x) = [x]$ (يقابل كل عنصر x بصنف التكافؤ الذي يحويه $[x]$)

هذا التطبيق مستمر وغامر ⇐ فهو يحافظ على التراص
وهو غير متباين.

ملاحظة:

يكون فضاء الجداء X و $X = \prod_{\alpha} X_{\alpha}$ متراص إذا وفقط إذا
كانت جميع الفضاءات الاحداثية متراصة.

تمرين -١-

ليكن $f : X \to Y$ تطبيقاً مستمراً ① من الفضاء المتراص X ②

الى فضاء هاوسدورف ③ Y

أثبت أن f تطبيقاً مغلقاً ؟!

الحل:

① نأخذ A مجموعة مغلقة في فضاء متراص ← مبرهنة تكون متراصة

② بما أن f مستمر والاستمرار يحافظ على التراص ← فإن $f(A)$ تكون متراصة

③ والمتراص في فضاء هاوسدورف هي مجموعة مغلقة.

← التطبيق مغلق.

تمرين -٢-

أثبت أن اجتماع عدد منته من المجموعات المتراصة هو مجموعة متراصة.

الحل:

لنأخذ A ، B مجموعتان متراصتان من الفضاء X

ولنثبت أن $A \cup B$ متراص

وباستخدام التعريف : نأخذ تغطية مفتوحة كيفية U لـ $A \cup B$

ومن هنا نجد أن U تغطية مفتوحة لـ A وبما أن A متراصة فإن هذه

التغطية المفتوحة U تحوي على تغطية جزئية منتهية U_1 لـ A

ونفس الكلام من أجل B

كما أن U تغطية مفتوحة لـ B ، وبما أن B متراصة ← فإن هذه

التغطية تحوي على تغطية جزئية منتهية ولتكن U_2 لـ B

وأخيراً نلاحظ أن : $U_1 \cup U_2$ تشكل تغطية جزئية مفتوحة

ومنتهية لـ $A \cup B$

← وبالتالي الاجتماع متراص.

" كل فضاء متري هو فضاء هاوسدورف "

| 1 فكرة التراص نشأة كتعميم لخواص المجالات المغلقة في R | 1 |

التراص في الفضاءات المترية :

ملاحظة 1 :
المجموعة المتراصة في فضاء متري هي مجموعة محدودة .

ملاحظة 2 :
كل مجموعة متراصة لفضاء متري تكون مغلقة ومحدودة .
والعكس في الحالة العامة غير صحيح .
والعكس صحيح في الفضاءات الاقليدية فقط أي R^n

نتيجة :
في R^n A متراصة $\Leftrightarrow$ A مغلقة ومحدودة .

* فكرة التراص نشأة كتعميم لخواص المجالات المغلقة في R
"أي مجال مغلق في R هو مجموعة متراصة "

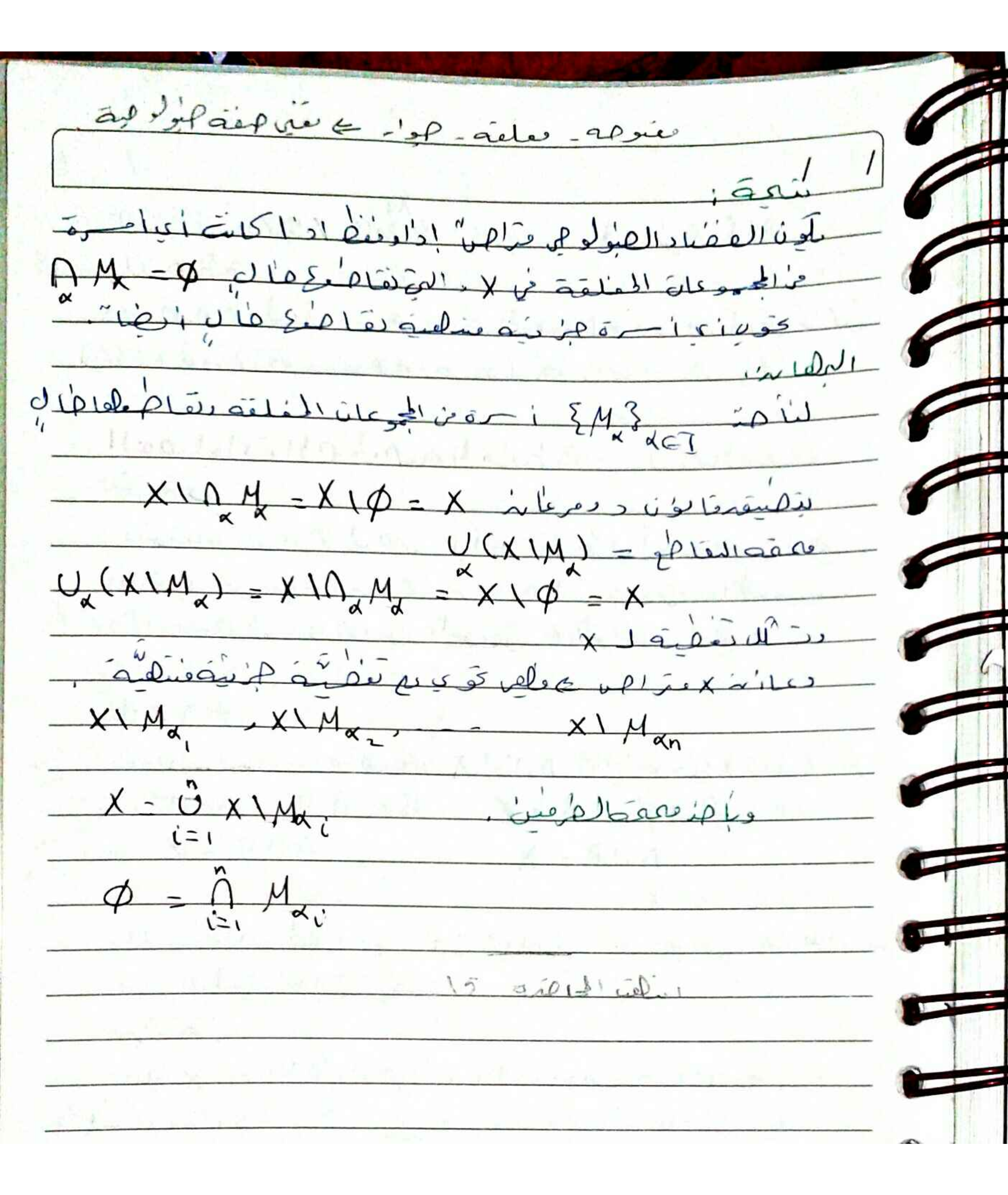
a b

1 2 5 7

* لماذا R غير متراص ؟
لأنه مغلق ولكنه غير محدود

Q غير مغلقة وغير محدودة ⇐ غير متراصة
]2,7[محدود وغير مغلق ⇐ " "

المستطيل ⇐ متراص "لأنه مغلق ومحدود "
الشكل الحالي الدائرة ؟
الإتحاد الجزئي لكل عائلة غير متراص
• مثل المجموعة Z مجموع كل نقطة في نقاط Z ولكن الإتحاد غير محدود
⇐ الإتحاد عدد لا نهائي من Z (غير متراص لأنه غير محدود)
• وكذلك الإتحاد عدد نهائي من المستطيلات ⇐ يشكل المستوي وهو غير محدود
⇐ الإتحاد الدائري المستطيلات (غير متراص) لأنه غير محدود .



مفتوحة - مغلقة - جوار - تعني صفة توبولوجية

نتيجة:

يكون الفضاء التبولوجي متراص إذا وفقط إذا كانت أي أسرة من المجموعات المغلقة في X، التي تقاطعها فارغ $\bigcap_\alpha M_\alpha = \phi$ تحوي على أسرة جزئية منتهية تقاطعها فارغ أيضاً.

البرهان:

لتأخذ $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ أسرة من المجموعات المغلقة تقاطعها فارغ

بتطبيق قانون دي مورغان $X \setminus \bigcap_\alpha M_\alpha = X \setminus \phi = X$

ومنه التقاطع $\bigcup_\alpha (X \setminus M_\alpha) =$

$$\bigcup_\alpha (X \setminus M_\alpha) = X \setminus \bigcap_\alpha M_\alpha = X \setminus \phi = X$$

وتشكل تغطية لـ X

وبما أن X متراص يوجد تغطية جزئية منتهية.

$$X \setminus M_{\alpha_1}, \; X \setminus M_{\alpha_2}, \; \ldots \; X \setminus M_{\alpha_n}$$

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} X \setminus M_{\alpha_i}$$ وبأخذ متمم الطرفين.

$$\phi = \bigcap_{i=1}^{n} M_{\alpha_i}$$

انتهت المحاضرة 15